Inégalité de Carleman

+ Dem arithmético géom →

Leçons 229, 230

Référence : FGN analyse 2

Théorème Pour toute série $\sum_{n\geq 0} a_n$ à termes positifs, convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (\circledast)$$

et e est la meilleure constante réalisant cette inégalité.

Démonstration

#1 Montrons l'existence d'une constante satisfaisant $(\circledast)$.

On aurait envie d'utiliser $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ mais si $a_k \neq 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_k}{n}$ diverge. On préfère considérer $k a_k$:

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \frac{\sqrt[n]{(a_1)(2a_2)\dots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} k a_k .$$

Or $$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{k}$$

Donc :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k a_k}{(n+1)n}$$

Posons $$v_{n,k} = \begin{cases} \frac{k a_k}{n(n+1)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

$(v_{n,k})_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable car :

* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |v_{n,k}| = \sum_{n=k}^{+\infty} v_{n,k} = k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

* $a_k \in [0,+\infty[$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge (absolument).

Équivalent de $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$?

* Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n} \times n \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}} = e\,(2\pi n)^{-1/2n}$$

Or $n^{-1/2n} = e^{\frac{-1}{2n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ par croissance comparée.

D'où

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{+\infty}{\sim} e.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\geq1}$ converge donc elle est bornée : il existe $C\geq 0$ telle que $\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C$.

Finalement, on obtient :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq C \sum_{k=1}^{n} v_{n,k} \leq C \sum_{k,n\geq1} v_{n,k} = C \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,k} = C \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

#2 Montrons que e est la meilleure constante. Soit C une autre cte, montrons que $e \leq C$.

$\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$: Pour montrer que e convient.

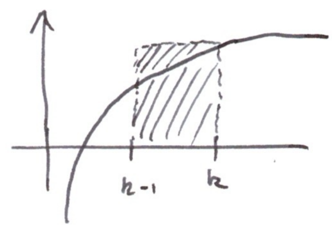
$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e \iff \ln(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq 1$$

$$\iff n\ln(n+1) \leq n + \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

$$\iff (n+1)\ln(n+1) - n \leq \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)$$

Or $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et décroissante donc :

$$\ln(k) \geq \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt$$



$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) \geq \left[x\ln(x) - x\right]_{1}^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

$e \leq C$: Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \in \{1, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim C\ln(N)$

et $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e}{n}$ dv donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ dv ~~donc~~ et

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{+\infty}{\sim} e\ln(N)$$

D'où $e\ln(N) \leq C\ln(N)$ et donc $\boxed{e \leq C}$